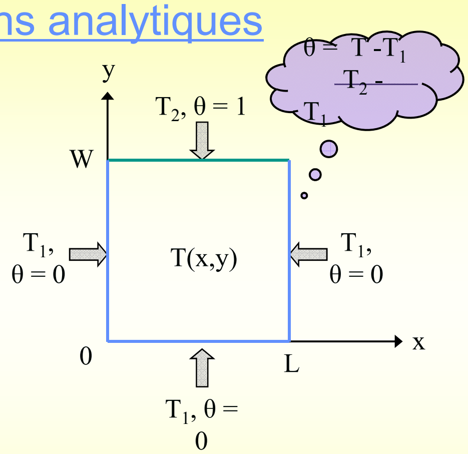
☞Chapitre 4 (suite)
Solutions analytiques

On dispose de nombreux outils mathématiques pour résoudre analytiquement l'équation de diffusion thermique dans un système bidimensionnel.



Dans l'exemple qui sera traité, on utilisera la méthode de séparation de variables ainsi que la théorie des fonctions orthogonales.

Soit à résoudre le champ de température, T(x,y), dans la colonne de brique dont trois faces sont à une température T_1 alors que la dernière est à une température T_2.

On peut définir la variable adimensionnelle:

$$\theta(x,y) = \frac{T(x,y) - T_1}{T_2 - T_1}$$

L’équation à résoudre est:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$$

Avec les conditions frontières:

$$\theta(0,y) = 0 \quad ; \theta(x,0) = 0 \quad \theta(L,y) = 0$$

$$\theta(x,W) = 1$$

Méthode de séparation de variables, on cherche une solution de la forme: $\theta(x,y) = X(x)\ Y(y)$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y(y)\ \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + X(x)\ \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda^2$$

le membre de gauche est une fonction de x uniquement = le membre de droite est une fonction de y uniquement

Pour vérifier cette égalité pour tout x et y, il faut donc que chaque membre soit simplement égal à une constante. Pour les conditions frontières de ce problème, cette constante sera choisie positive et appelée λ^2.

On doit donc résoudre:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad \frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0$$

Et les solutions de ces deux équations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients constants sont de la forme:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

$$Y(y) = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}$$

$$\theta(x,y) = X(x)\ Y(y)$$

$$\boxed{\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x).(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})}$$

$$\boxed{\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x).(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y})}$$

Pour trouver les constantes d'intégration, on utilise les conditions frontières

1 $CF\ \theta(0,y) = 0 \Rightarrow C_1(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

2 $CF\ \theta(x,0) = 0 \Rightarrow (C_2 \sin \lambda x)(C_3 + C_4) = 0$

$$\Rightarrow C_3 = -C_4$$

3 $CF\ \theta(L,y) = 0 \Rightarrow C_2 \sin \lambda L (C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) = 0$

$$\Rightarrow \sin \lambda L = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \quad avec\ \ n = 1,2,3,...$$

1

La solution peut alors s'écrire:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\theta(x,y) = \underbrace{C_2\, C_4}_{\frac{C_n}{2}} \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right) \underbrace{\left(e^{\frac{n\,\pi\,y}{L}} - e^{-\frac{n\,\pi\,y}{L}}\right)}_{2\ \sinh\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

$$\theta(x,y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Nous avons obtenu en fait une infinité de solutions particulières. Comme le problème est linéaire, la solution générale est donc une combinaison linéaire des solutions particulières:

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

Pour déterminer les constantes Cn, on écrit la dernière condition frontière:

$$\boxed{4} \quad \theta(x,W) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right) = 1$$

Bien que cette relation soit complexe, on va voir que l'utilisation de la théorie des fonctions orthogonales permet de déterminer les constantes Cn.

Rappel sur les fonctions orthogonales

Un ensemble infini de fonction $g_1, g_2, \ldots, g_n$ est orthogonal dans le domaine $a \leq x \leq b$ si:

$$\int_a^b g_m(x) g_n(x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

Exemple: $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ orthogonales pour $0 \leq x \leq L$

Une propriété intéressante des fonctions orthogonales est que toute fonction f(x) peut s'exprimer sous la forme d'une somme infinie de fonctions orthogonales:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\, g_n(x)$$

Les coefficients A_n se déterminent facilement en multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $g_m(x)$ et en intégrant entre a et b:

$$\int_a^b f(x)\, g_m(x)\, dx = \underbrace{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty}} A_n\, g_n(x)\, g_m(x) dx$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}} \underbrace{\int_a^b A_n g_n(x) g_m(x) dx} = \int_a^b A_m g_m^2(x) dx = A_m \int_a^b g_m^2 dx$$

tous les termes de la somme infinie, sauf un n=m, s'annulent puisque *__g_m et g_n sont orthogonales__ pour m≠n*

$$\int_a^b g_m(x)\, g_n(x) dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$\int_a^b f(x)\, g_m(x)\, dx \quad = \quad A_m \int_a^b g_m^2(x)\, dx$$

$$A_m = \frac{\int_a^b f(x)\, g_m(x) dx}{\int_a^b g_m^2(x) dx}$$

Pour notre problème, si nous choisissons f(x)=1 avec comme fonctions orthogonales: sin[(nπx)/L], l'équation précédente donne alors:

$$A_m = \frac{\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L} dx}{\int_0^L \sin^2\frac{n\pi x}{L} dx} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n}$$

Ainsi la fonction f(x)=1 peut s'écrire:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\, g_n(x) \qquad 1=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\,\sin\frac{n\pi x}{L}$$

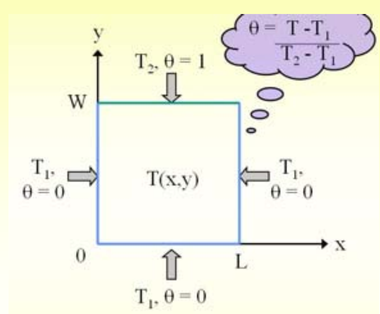
En comparant cette relation avec celle obtenue pour la condition frontière θ(x,W) = 1

$$\boxed{4} \qquad \theta(x,W)=1=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)$$

il est alors facile d'identifier terme à terme ces deux sommations et de trouver les coefficients C_n:

$$C_n=\frac{2[(-1)^{n+1}+1]}{n\pi \sinh\left(\dfrac{n\pi W}{L}\right)}$$

La solution générale au problème est donc:



$$\theta(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\frac{\sinh\left(\dfrac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\dfrac{n\pi W}{L}\right)}$$

La représentation graphique de cette fonction est présentée ci-dessous.

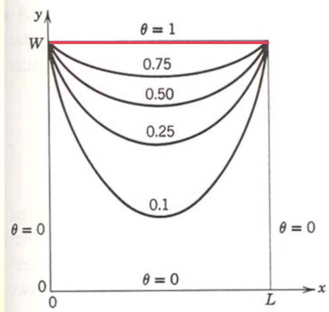


Figure 4.3 Isotherms for two-dimensional conduction in a rectangular plate.

Hence from Equation 4.14, we have

Isothermes: lieu des points ayant même température.

Le transfert de chaleur se fait suivant des courbes perpendiculaires aux isothermes: les adiabatiques

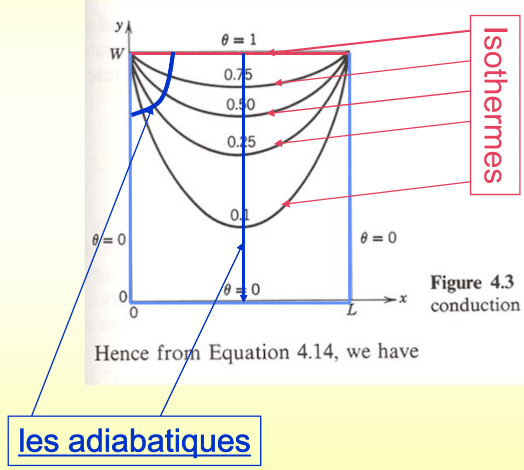
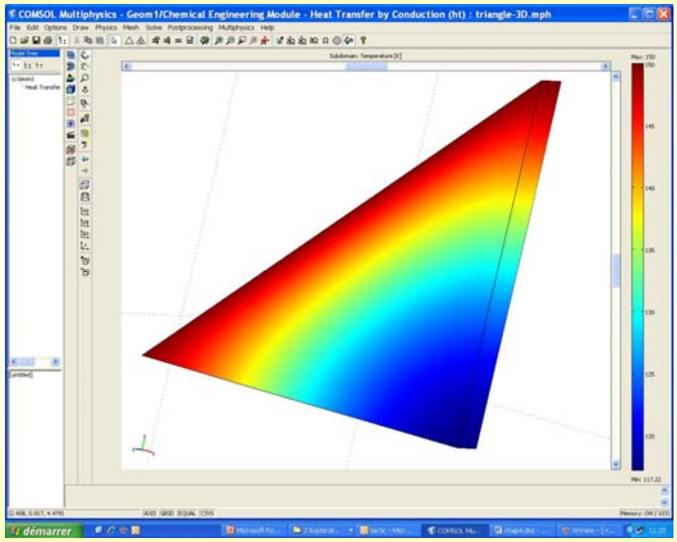


Figure 4.3 Isotherms for two-dimensional conduction in a rectangular plate.

Hence from Equation 4.14, we have



$$\theta(x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{L}\,\frac{\sinh\left(\dfrac{n\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\dfrac{n\pi W}{L}\right)}$$