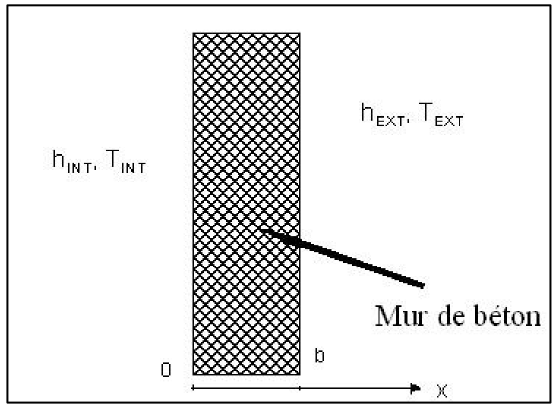
Solutionnaire : <u>Travaux dirigés No 3</u>

I) Profil dans un mur de béton (6 pts)

Un mur de béton (épaisseur b, largeur W, hauteur L, conductivité k) sépare une pièce à la température T_{INT} , de l'extérieur dont la température est T_{EXT} . Les coefficients de transfert de chaleur sur les faces intérieure et extérieure de ce mur sont respectivement h_{INT} et h_{EXT}



I.1 Faites un bilan de chaleur sur un volume de contrôle pertinent et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température dans le mur (on négligera les effets de bouts) (2 pts)

1) Hypothèses :

T=T(x) k=Constante régime permanent $\frac{\partial}{\partial t}=0$

2) Volume de contrôle $A\,\Delta x$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort + ~~Ce qui est généré~~ = ~~Ce qui s'accumule~~

Ce qui rentre – Ce qui sort =0

$$A\,q_x''\big|_x - A q_x''\big|_{x+\Delta x} = 0$$

On divise par $A\Delta x$ et on fait tendre Δx vers 0

$$\frac{A\,q_x''\big|_x - A q_x''\big|_{x+\Delta x}}{A\Delta x} = \frac{q_x''\big|_x - q_x''\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{q_x''\big|_x - q_x''\big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0$$

On intègre une première fois :

$$-\frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0 \Rightarrow q_x'' = C_1'$$

On utilise la loi de Fourier

$$q_x'' = -k\frac{\partial T}{\partial x} = C_1'$$

Et on intègre une deuxième fois :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{C_1'}{k} \quad\Rightarrow\quad T_x = \left(-\frac{C_1'}{k}\right)x + C_2 \quad\Rightarrow\quad T_x = C_1 x + C_2$$

Les constantes d'intégration C'_1 et C_2 sont obtenues en écrivant les conditions frontières

CF1 : $à\ x=0 \Rightarrow q_x''\big|_{x=0} = h_{INT}\left(T_{INT} - T_{x=0}\right) = \left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}$

CF2 : $\grave{a}\ x = b \Rightarrow q''_x\Big|_{x=b} = \left(-k\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=b} = h_{EXT}\left(T_{x=b} - T_{EXT}\right)$

$$\grave{a}\ x = 0 = h_{INT}\left(T_{INT} - T_{x=0}\right) = h_{INT}\left(T_{INT} - \left[C_1 0 + C_2\right]\right) = h_{INT}\left(T_{INT} - C_2\right) = \left(-k\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = -kC_1$$

$$h_{INT}\left(T_{INT} - C_2\right) = -kC_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = T_{INT} + \frac{k}{h_{INT}}C_1$$

$$\grave{a}\ x = b \Rightarrow h_{EXT}\left(T_{x=b} - T_{EXT}\right) = h_{EXT}\left(\left[C_1 b + C_2\right] - T_{EXT}\right) = -kC_1$$

$$h_{EXT}\left(C_1 b + T_{INT} + \frac{k}{h_{INT}}C_1 - T_{EXT}\right) = -kC_1 \Rightarrow C_1\left(b + \frac{k}{h_{INT}} + \frac{k}{h_{EXT}}\right) = \left(T_{INT} - T_{EXT}\right)$$

$$C_1 = \frac{\left(T_{EXT} - T_{INT}\right)}{\left(b + \dfrac{k}{h_{INT}} + \dfrac{k}{h_{EXT}}\right)}$$

II) <u>Stockage d'air liquide dans un réservoir sphérique</u> (6 pts)

Un réservoir sphérique de rayon r_1=1.5 m, contient de l'air liquide. Le réservoir est isolé par une épaisseur de 0.05 m d'un matériau isolant de conductivité k=0.05 W/(m.K). On peut supposer que la paroi externe du réservoir reste à température constante T_1=80 K. A la surface de l'isolant, il y a échange par convection avec l'air ambiant à la température T_∞=283 K et le coefficient de convection h est égal à 18 W/(m^2.K).

$$R_{\substack{conduction\\ sphère\,creuse}} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad R_{\substack{convection\\ sur\,une\,sphère}} = \frac{1}{4\pi h\, r_2^2}$$

$$R_{\substack{conduction\\ sphère\,creuse}} = 3.42\times10^{-2} \qquad R_{\substack{convection\\ sur\,une\,sphère}} = 1.84\times10^{-3} \qquad R_{TOTALE} = 3.606\times10^{-2}$$

$$\Delta T_{\infty-1} = R_{TOTALE}\,q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\Delta T}{R_{TOTALE}} = \frac{\left(T_\infty - T_1\right)}{R_{TOTALE}} = \frac{\left(283 - 80\right)}{3.606\times10^{-2}} = 5629.5 \quad W$$

$$\Delta T_{\infty-2} = R_{convection}\,q \quad \Rightarrow \quad \left(T_\infty - T_2\right) = 1.84\times10^{-3}\times5629.5 = 10.35 = \left(283 - T_2\right)$$

$$T_2 = 283 - 10.35 = 272.6\ K$$

À 272.6 K l'eau gèle, il y aura donc condensation de la vapeur d'eau sur la surface du réservoir puis congélation, le réservoir va devenir un gros glaçon : l'épaisseur est insuffisante !

III) <u>Température d'un fil électrique</u> (3 pts)

Un fil électrique de 1 mm de diamètre est dénudé sur une longueur de 1 m. Calculer la température de ce fil (<u>température qu'on supposera uniforme</u>), sachant que la puissance générée par effet joule est de 1.5 watt/m, que la température de l'air est de 20 °C et que le coefficient de transfert de chaleur à la surface du fil avec l'air environnant vaut 12. W/m^2.C.

Bilan macroscopique sur le fil :

Solutionnaire TD-3.

$$E_{in} - E_{out} + E_{généré} = E_{accumulé} \qquad mais \quad E_{in} = 0 \qquad E_{accumulé} = 0$$

$$E_{out} = \pi DLh\left(T_{r=R} - T_{air}\right) \quad et \quad E_{généré} = 1.5\,W$$

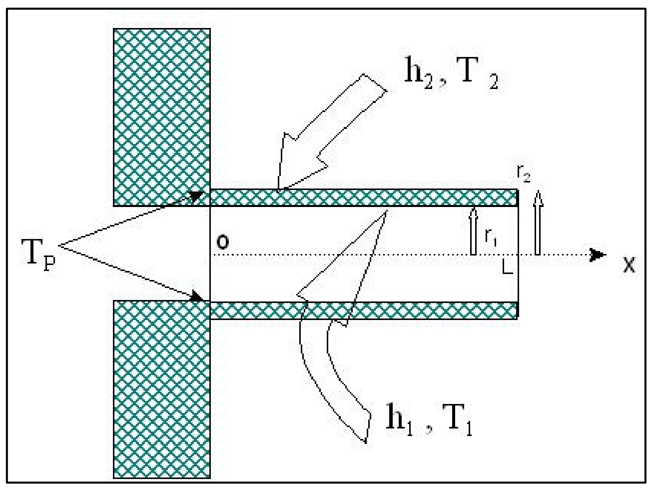
$$\pi DLh\left(T_{r=R} - T_{air}\right) = 1.5 \Rightarrow T_{r=R} = T_{air} + \frac{1.5}{\pi \times 0.001 \times 1 \times 12} = 20 + 39.79 = 59.79^{o}\,C$$

IV) **Quiz (2 pts)** Cocher la bonne réponse:

- Pour la construction d'une ailette, il est préférable d'utiliser un matériau qui à un faible conductivité. ~~VRAI ☐~~ FAUX ☐
- Dans une ailette, l'augmentation de la conductivité favorise la diminution du gradient de la température. VRAI ☐ ~~FAUX ☐~~
- Dans un bilan de chaleur associé à un problème de conduction, si il y a un terme de génération de chaleur alors le terme d'accumulation est non nul. ~~VRAI ☐~~ FAUX ☐
- À l'interface entre deux solides, plus la résistance de contact est faible, plus la différence entre les températures de ces deux surfaces est grande. ~~VRAI ☐~~ FAUX ☐

V) **Ailette en forme de cylindre creux (8 pts)**

Une ailette, de longueur L, a la forme d'un cylindre creux. Sa base est fixée sur une paroi à la température T_p. La face intérieure du cylindre est refroidie par de l'air à la température T_1 avec un coefficient de convection h_1 alors que la face extérieure est refroidie avec un air à la température T_2 avec un coefficient de convection h_2.



On supposera que le flux de chaleur axial à x=L sur l'extrémité de l'ailette est négligeable.

a) Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié de l'ailette et obtenez l'équation différentielle que doit satisfaire la température de cette ailette. (4.5 pts)

b) Quelles sont les conditions frontières ? (1 pt)

c)Obtenez l'expression du profil de température. (2.5 pts)

T=T(x) k=Constante E_g=0 régime permanent $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle $\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)\Delta x = s\,\Delta x$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre(conduction) – Ce qui sort (conduction+convection à la surface de la tige)=0

Solutionnaire TD-3.

$$s\,q_x^{''}\Big|_x - s q_x^{''}\Big|_{x+\Delta x} - 2\pi r_1 \Delta x\, h_1 (T_x - T_1) - 2\pi r_2 \Delta x\, h_2 (T_x - T_2) = 0$$

On divise par $s\Delta x$ et on fait tendre Δx vers

$$\frac{s\,q_x^{''}\Big|_x - \; s q_x^{''}\Big|_{x+\Delta x} - 2\pi r_1 \Delta x\, h_1 (T_x - T_1) - 2\pi r_2 \Delta x\, h_2 (T_x - T_2)}{s\Delta x} = 0$$

$$\frac{q_x^{''}\Big|_x - \; q_x^{''}\Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{2\pi r_1\, h_1 (T_x - T_1) + 2\pi r_2\, h_2 (T_x - T_2)}{s} = 0 \qquad \lim_{\delta x \to 0} \frac{q_x^{''}\Big|_x - \; q_x^{''}\Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x^{''}}{\partial x}$$

$$q_x^{''} = -k\frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial q_x^{''}}{\partial x} = -\frac{\partial\left(-k\dfrac{\partial T_x}{\partial x}\right)}{\partial x} = k\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - \frac{2\pi r_1\, h_1 (T_x - T_1) + 2\pi r_2\, h_2 (T_x - T_2)}{s} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - T_x\left[\frac{2\pi r_1\, h_1 + 2\pi r_2\, h_2}{s}\right] + \left[\frac{2\pi r_1\, h_1 T_1 + 2\pi r_2\, h_2 T_2}{s}\right] = 0 \quad (1)$$

$$posons \quad U = T_x \underbrace{\left[\frac{2\pi r_1\, h_1 + 2\pi r_2\, h_2}{s}\right]}_{\alpha^2} - \underbrace{\left[\frac{2\pi r_1\, h_1 T_1 + 2\pi r_2\, h_2 T_2}{s}\right]}_{\beta} = \alpha^2 T_x - \beta \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U = 0 \quad (2)$$

L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) dont le polynôme caractéristique $r^2 - \alpha^2 = 0$ admet deux racines $+\alpha$ et $-\alpha$ La solution de (2) est donc :

$$\boxed{U = \alpha^2 T_x - \beta = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}} \; (S1)$$

Les constantes C_1 et C_2 sont obtenues en écrivant les conditions frontières:

$$\grave{a}\;\; x = 0 \;\; T_x\Big|_{x=0} = T_p \quad \Rightarrow \quad U_{x=0} = \alpha^2 T_{x=0} - \beta = \alpha^2 T_p - \beta = U_p = C_1 e^{\alpha 0} + C_2 e^{-\alpha 0}$$

$$\Rightarrow \quad C_1 + C_2 = U_p \qquad (a)$$

$$\grave{a}\;\; x = L \; le\; flux\, est\; n\acute{e}gligeable \;\; q_x^{''} = -k\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}\Bigg|_{x=L} = \alpha C_1 e^{\alpha L} - \alpha C_2 e^{-\alpha L} = 0 \quad (b)$$

On résout le système de 2 équations a) et b) à 2 inconnues C_1 et C_2

$$C_1 + C_2 = U_p \Rightarrow \boxed{C_1 = U_p - C_2}$$

$$on\; remplace\; C_1\; dans\; b)$$

$$\alpha\left(U_p - C_2\right)e^{\alpha L} - \alpha C_2 e^{-\alpha L} = 0 \qquad \Rightarrow C_2\left(e^{\alpha L} + e^{-\alpha L}\right) = U_p e^{\alpha L}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C_2 = \frac{U_p\, e^{\alpha L}}{\left(e^{\alpha L} + e^{-\alpha L}\right)}} \quad avec \quad U_p = \alpha^2 T_p - \beta$$