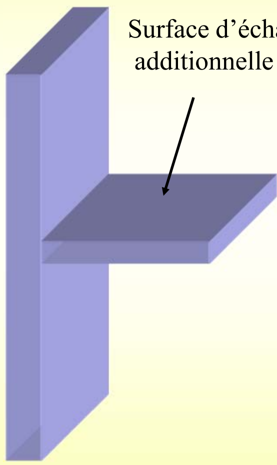
☞Chapitre 3 (suite):

3.11 Conduction dans une ailette rectangulaire



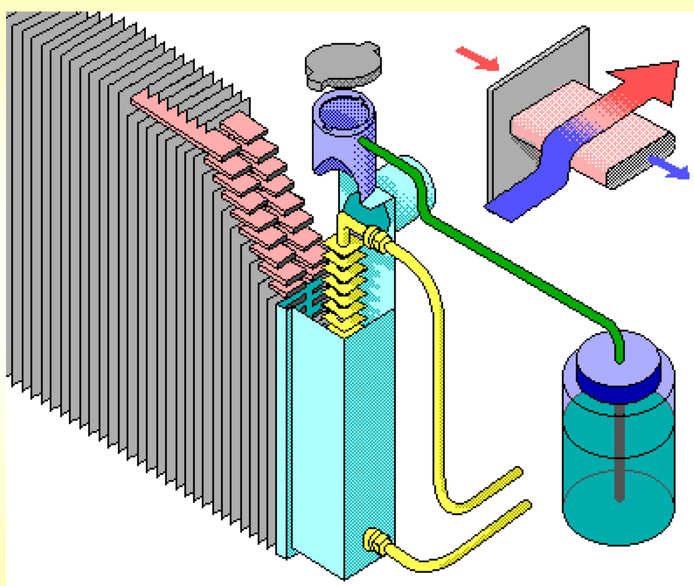
La fonction d'une ailette est d'augmenter la surface d'échange d'un objet donné. L'augmentation de cette surface favorise donc le transfert de chaleur.

On retrouve des ailettes dans de nombreux dispositifs utilisés quotidiennement:

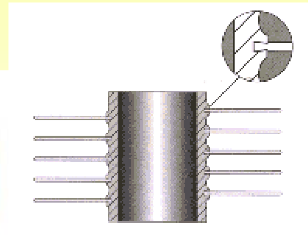
- plinthe électrique,
- radiateur d'automobile,
- circuit électronique.

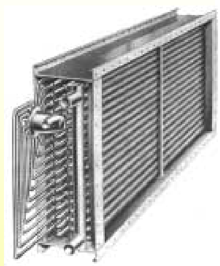
1

Exemple de fonctionnement d'un radiateur



Divers types de tubes





à ailettes variées

1

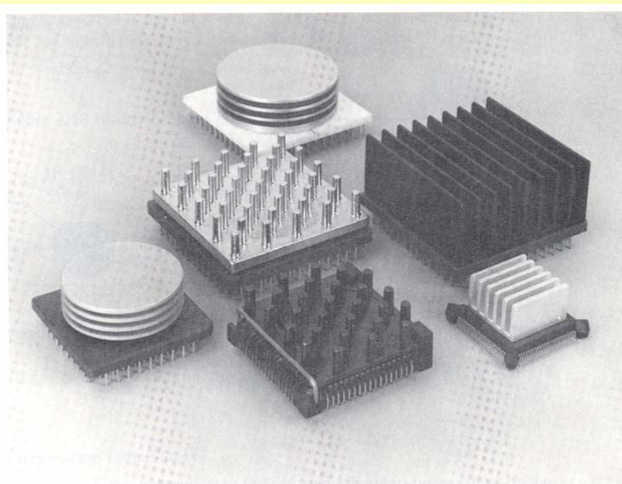
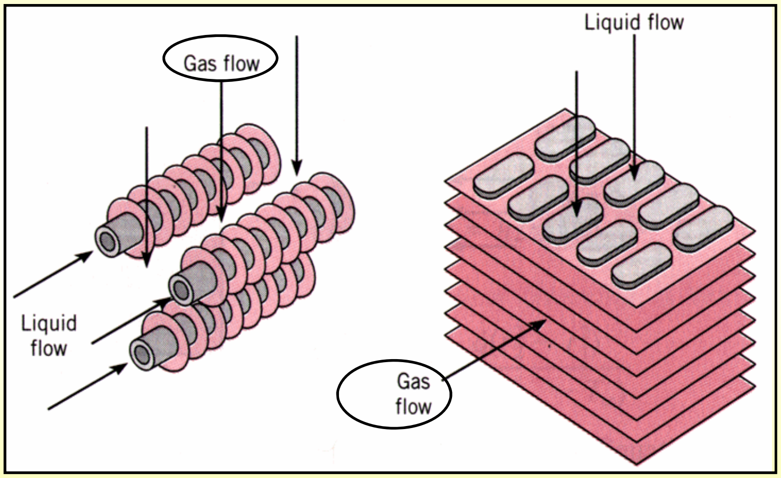
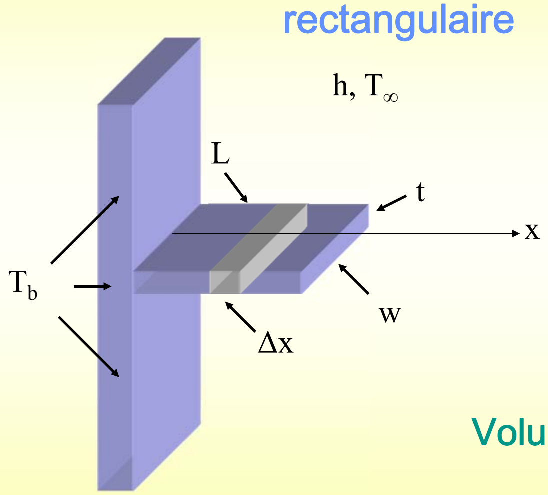


Figure 2.8 Some heat sinks incorporating fins for cooling of standard packages for integrated circuits. (Photograph courtesy of EG&G Wakefield Engineering, Wakefield, Mass.)

Tubes à ailettes typiques des échangeurs de chaleur compact



Faisons l'analyse du transfert de chaleur en régime permanent dans une ailette rectangulaire



Hypothèses

$E_G=0$

$(\partial T/\partial t)=0$,

k=constante

T=T(x)

On néglige les effets de bouts

Volume de contrôle

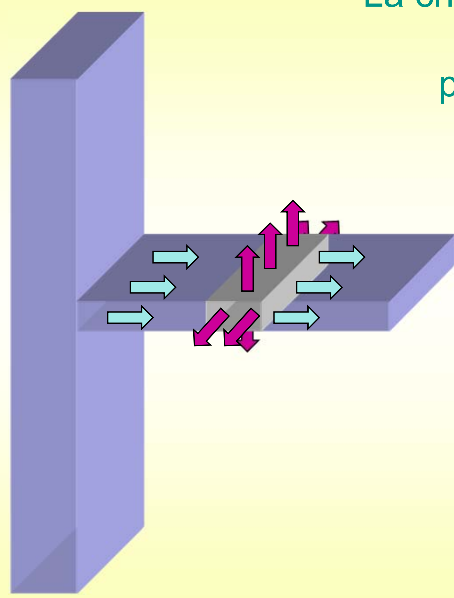
W t Δx

$E_{IN} - E_{OUT} + \cancel{E}_G = \cancel{E}_{ACC} \quad \Rightarrow E_{IN} - E_{OUT} = 0$

La chaleur est transmise dans l'ailette par <u>conduction</u>.

in

out



Puis, elle est evacuée à l'extérieur par <u>convection</u>

out

1

Bilan de chaleur

$E_{IN} - E_{OUT} + \cancel{E}_G = \cancel{E}_{ACC} \quad \Rightarrow E_{IN} - E_{OUT} = 0$

W t=section de l'ailette

2(W+t)= périmètre

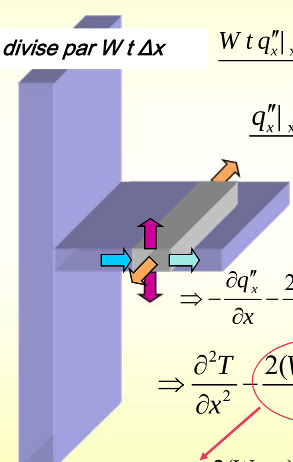
$$Wt\, q''_x|_x - Wt\, q''_x|_{x+\Delta x} - 2(W+t)\Delta x\, h\, [T(x) - T_\infty] = 0$$

On divise par W t Δx

$$\frac{W\, t\, q''_x|_x - W\, t\, q''_x|_{x+\Delta x} - 2\,(W+t)\, h\, \Delta x\, (T(x) - T_\infty)}{W\, t\, \Delta x} = 0$$

$$\frac{q''_x|_x - q''_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{2(W+t)\, h}{W\, t}(T(x) - T_\infty) = 0$$

$$\lim|_{\Delta x \to 0} \frac{q''_{x+\Delta x} - q''_x}{\Delta x} = \frac{\partial q''_x}{\partial x} = 0$$



$$\Rightarrow -\frac{\partial q''_x}{\partial x} - \frac{2(W+t)\, h}{W\, t}(T(x) - T_\infty) = 0 \qquad \text{mais} \quad q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial q''_x}{\partial x} == k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{2(W+t)\, h}{k\, W\, t}(T(x) - T_\infty) = 0$$

posons $m^2 = \frac{2(W+t)\, h}{k\, W\, t}$ $\quad \theta = (T(x) - T_\infty)$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2\theta = 0}$$

1 2 3

Il s’agit d’une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

⇨ Le polynôme caractéristique associé est:

$$r^2 - m^2 = 0.$$

⇨ Celui-ci a deux racines réelles:

$$+m \text{ et } -m$$

⇨ La solution de l'équation différentielle est donc:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Les constantes d'intégration vont être obtenues en utilisant deux conditions frontières:

$$CF1: \quad \text{à } x = 0; \quad T(0) = T_b$$

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_b = (T_b - T_\infty)$$

Pour l'autre condition frontière, à x=L, il y a plusieurs possibilités: *mais en choisir une seule !*

a) À x=L, la température est connue:

$$T_{x=L} = T_L \, connue$$

b) À x=L, le flux est négligeable:

$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = 0$$

c) À x=L, si l’ailette est assez longue:

$$T(x = L) = T_\infty$$

d) À x=L, il y a échange par convection:

$$q''|_{x=L} = h(T_{x=L} - T_\infty)$$

Si on choisit la condition b), on peut donc écrire les deux équations que doivent vérifier les deux constantes d'intégration:

CF1: $\boxed{C_1 + C_2 = \theta_b}$ ← système de 2 équations à 2 inconnues

CF2: $\dfrac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = 0 \quad mais \quad \theta = T(x) - T_\infty \Leftrightarrow \dfrac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} = 0$

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad \Rightarrow \frac{d\theta}{dx}\Big|_{x=L} = \boxed{C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} = 0}$$

$$C_1 = \frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad et \quad C_2 = \frac{\theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}$$

$$\theta = \left[\frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right] e^{mx} + \left[\frac{\theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right] e^{-mx}$$

$$\theta = \left[\frac{\theta_b e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right] e^{mx} + \left[\frac{\theta_b e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right] e^{-mx}$$

$$e^a . e^b = e^{a+b}$$

$$\theta = \left[\frac{\theta_b e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right] + \left[\frac{\theta_b e^{m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}}\right] = \theta_b \frac{\left(e^{-m(L-x)} + e^{m(L-x)}\right)/2}{\left(e^{mL} + e^{-mL}\right)/2}$$

$$\boxed{\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh mL}}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{sinhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \qquad (\text{sinhx})' = \text{coshx}$$

L'énergie évacuée par l'ailette peut se calculer de deux manières:

Manière #1

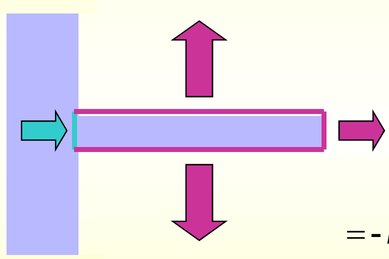
C'est la somme de toute la chaleur qui sort à la surface.

$$\iint_{S} h(T_s - T_\infty)ds = q_{ailette}$$

Manière #2

Un bilan macroscopique sur toute l'ailette (WtL)donne:

$E_{IN} - E_{OUT} = 0$



$$\begin{aligned} q_{AILETTE} &= Wt\, q''_x|_{x=0} \\ &= Wt\left(-k\frac{dT}{dx}|_{x=0}\right) \\ &= -kWt\frac{d\theta}{dx}|_{x=0} \\ &= -kWt\frac{d}{dx}\left(\theta_b \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}\right)|_{x=0} \\ &= (-kWt)\,\theta_b\,(-m)\frac{\sinh mL}{\cosh mL} \\ &= mkWt\theta_b \tanh mL \end{aligned}$$

1

$$q_{ailette} = mkWt\ \theta_b \tanh mL \qquad m = \sqrt{\frac{2\,(W+t)\,h}{kWt}} = \sqrt{\frac{P\,h}{k\,A}}$$

$$q_{ailette} = \sqrt{\frac{2\,(W+t)\,h}{kWt}}\ kWt\ \theta_b \tanh mL$$

$$q_{AILETTE} = \sqrt{k\ \underline{Wt}\ \underline{2\,(W+t)}\ h}\ \ \theta_b \tanh mL$$

$$= \sqrt{h\,k\,\underline{P}\ \underline{A}}\ \ \theta_b \tanh mL$$

$$q_{AILETTE} = M \tanh mL$$

Autres CF => autres solutions

Le rendement, η:

Comparaison avec une ailette idéale faite d'un matériau infiniment conducteur où la température serait identique partout dans l'ailette et égale à T_b.

$$\eta = \frac{q_{ailette}}{h\,A_{AILETTE}\,(T_b - T_\infty)}$$

* Le rendement est un nombre inférieur ou égal à 1.

$$\eta = \frac{\sqrt{h\,k\,P\,A}\ \ \theta_b \tanh mL}{h\,P\,L\,(T_b - T_\infty)}$$

$$\eta = \frac{\theta_b \tanh mL}{\sqrt{\frac{(\cancel{h}\,\cancel{P}\,L)^2}{\cancel{h}\,k\,\cancel{P}\,A}}\ (T_b - T_\infty)} = \frac{\tanh mL}{\sqrt{\frac{h\,P}{k\,A}}\ L} = \frac{\tanh mL}{mL}$$

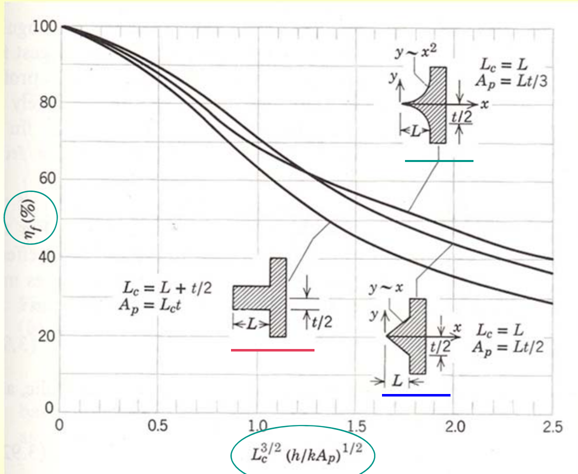


Figure 3.18 Efficiency of straight fins (rectangular, triangular, and parabolic profiles).

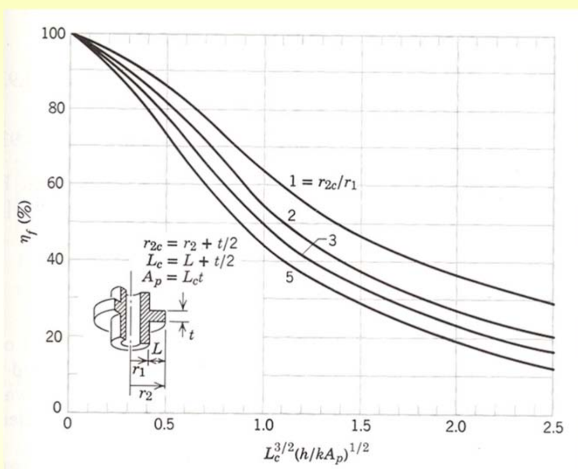


Figure 3.19 Efficiency of annular fins of rectangular profile.

L'efficacité, $\varepsilon_{ailette}$:

Comparaison avec la situation où il n'y aurait pas d'ailette.

$$\varepsilon_{ailette} = \frac{q_{ailette}}{hA(T_b - T_\infty)}$$

où A est la section occupée par l'ailette
à la base de la paroi.

L'installation de l'ailette est considérée intéressante si:
efficacité > 2