Chapitre 12

Effet du transfert de matière dans les extracteurs

12.1 Étages réels et efficacités

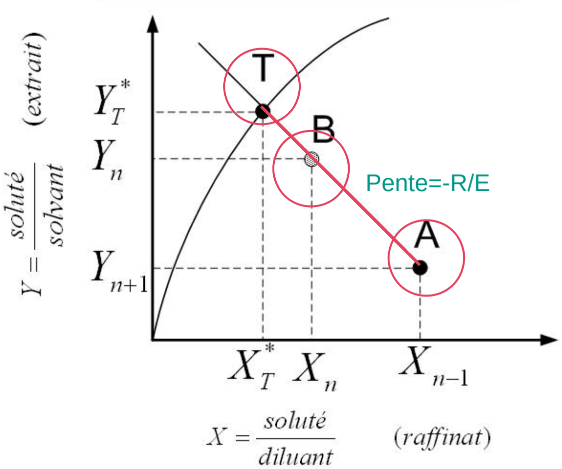
•Dans l'étage théorique, on suppose que les courants qui sortent sont à l'équilibre thermodynamique.

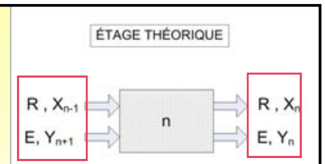
•En pratique, cette hypothèse n'est souvent pas vérifiée. Les compositions réelles des courants qui se séparent après avoir été mis en contact, ne satisfont pas la relation d'équilibre thermodynamique à cause des **limitations dues au transfert de matière** entre les deux phases.

•Pour caractériser cet écart au comportement idéal, on utilise le concept d'**efficacité**. Plusieurs définitions ont été proposées.

Efficacité de Hausen

$$\text{Efficacité de Hausen} = \frac{AB}{AT}$$



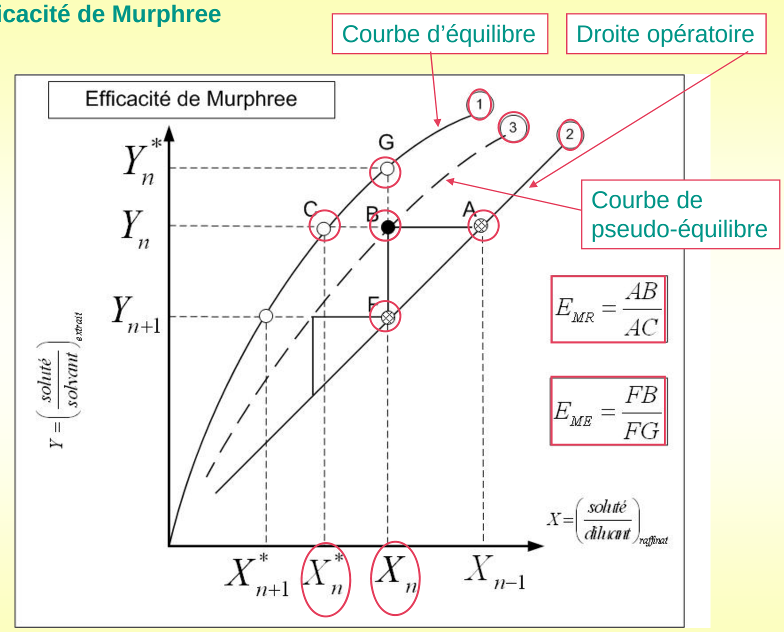


$$E_H = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} - x_T^*} = \frac{AB}{AT}$$

$$E_H = \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+1} - y_T^*}$$

Efficacité de Hausen: pas pratique à utiliser dans le cas de contre-courant.

Efficacité de Murphree



Efficacités de Murphree (en phases raffinat et extraite)

Efficacité en phase raffinat, E_{MR},

$$E_{MR} = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} - x_n^*} = \frac{AB}{AC}$$

x_n^* = valeur de x qui serait en équilibre avec y_n

Efficacité en phase extraite:

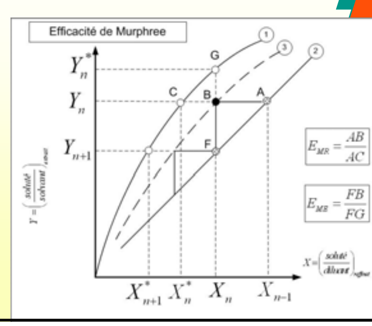
$$E_{ME} = \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n^* - y_{n+1}} = \frac{FB}{FG}$$

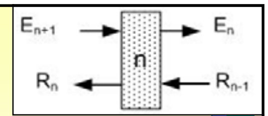
y_n^*= valeur de y qui serait en équilibre avec x_n

Si la courbe d'équilibre est une droite,

$$y_n = m x_n^* \qquad y_n^* = m x_n$$

$$E_{ME} = \frac{y_n - y_{n+1}}{y_n^* - y_{n+1}} = \frac{x_n^* - x_{n+1}^*}{x_n - x_{n+1}^*}$$





Le bilan en soluté sur un étage :

$$E\left(y_n - y_{n+1}\right) = R\boxed{\left(x_{n-1} - x_n\right)} \qquad [12.4]$$

Relation simple entre E_{MR} et E_{ME}:

$$E_{MR} = \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} - x_n^*} = \frac{\frac{E}{R}\left(y_n - y_{n+1}\right)}{x_{n-1} - x_n^*} = \frac{\frac{mE}{R}\left(y_n - y_{n+1}\right)}{m\,x_{n-1} - m\,x_n^*} = \frac{\frac{1}{A}\left(y_n - y_{n+1}\right)}{\left(m\,x_{n-1} - y_n\right)}$$

$$\Rightarrow \quad m\,x_{n-1} - y_n = \frac{1}{A\,E_{MR}}\left(y_n - y_{n+1}\right) \qquad [12.5]$$

$$m \times [12.4] \Rightarrow mE\left(y_n - y_{n+1}\right) = mR\left(x_{n-1} - x_n\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{mx_{n-1}} = \frac{mE}{R}\left(y_n - y_{n+1}\right) + mx_n = \boxed{\frac{1}{A}\left(y_n - y_{n+1}\right) + y_n^*}$$

$$[12.5] \Rightarrow \quad \boxed{m\,x_{n-1}} - y_n = \frac{1}{A}\left(y_n - y_{n+1}\right) + y_n^* - y_n = \frac{1}{A\,E_{MR}}\left(y_n - y_{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A}\left(y_n - y_{n+1}\right) + \left(y_n^* - y_{n+1}\right) - \left(y_n - y_{n+1}\right) = \frac{1}{A\,E_{MR}}\left(y_n - y_{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A}\frac{\left(y_n - y_{n+1}\right)}{\left(y_n^* - y_{n+1}\right)} + \frac{\left(y_n^* - y_{n+1}\right)}{\left(y_n^* - y_{n+1}\right)} - \frac{\left(y_n - y_{n+1}\right)}{\left(y_n^* - y_{n+1}\right)} = \frac{1}{A\,E_{MR}}\frac{\left(y_n - y_{n+1}\right)}{\left(y_n^* - y_{n+1}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{A}E_{ME} + 1 - E_{ME} = \frac{1}{A\,E_{MR}}E_{ME} \qquad \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{E_{ME}} - 1 = \frac{1}{A\,E_{MR}}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{E_{MR}} - 1\right) = A\left(\frac{1}{E_{ME}} - 1\right) \qquad [12.6]}$$

De même, à partir des définitions de E_{MR}, E_H et en utilisant les bilans matières sur l'étage (réel et théorique), on pourrait démontrer la relation entre les efficacités de Murphree et de Hausen:

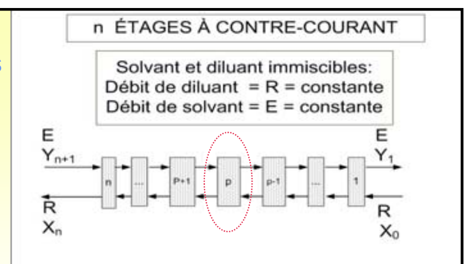
$$\left(\frac{1}{E_{MR}}-1\right)=\left(\frac{1}{E_H}-1\right)(1+A) \qquad [12.7]$$

Efficacité globale

Soit un extracteur composé de N_R étages réels. Pour une séparation donnée, on peut comparer ce nombre, au nombre d'étages théoriques, N_T, qu'il faudrait pour obtenir la même séparation. On définit ainsi l'efficacité globale de l'appareil, E_G, par:

$$E_G=\frac{N_T}{N_R} \qquad [12.8]$$

12.2 Extracteurs à étages multiples (systèmes immiscibles)



Cas où l'équilibre est une droite:
$y^*=m\,x$ $\qquad$ $y=mx^*$

Bilan autour d'un étage p:

$$R\left(x_{p-1}-x_p\right)=E\left(y_p-y_{p+1}\right)$$

$$R\left(x_{p-1}-x_p\right)=E\,m\left(x_p^*-x_{p+1}^*\right)\Rightarrow\frac{\left(x_p^*-x_{p+1}^*\right)}{\left(x_{p-1}-x_p\right)}=\frac{R}{mE}=A \qquad [12.9]$$

Appliquons [12.9] pour tous les étages 1 à n et faisons le produit des termes:

$$\Rightarrow\underbrace{\frac{\left(x_1^*-x_2^*\right)}{\left(x_0-x_1\right)}}_{p=1}\bullet\underbrace{\frac{\left(x_2^*-x_3^*\right)}{\left(x_1-x_2\right)}}_{p=2}\cdots\frac{\left(x_{n-1}^*-x_n^*\right)}{\left(x_{n-2}-x_{n-1}\right)}\bullet\underbrace{\frac{\left(x_n^*-x_{n+1}^*\right)}{\left(x_{n-1}-x_n\right)}}_{p=n}=A^n \qquad [12.10]$$

$$(E_{MR})_{p+1}=\frac{x_p-x_{p+1}}{x_p-x^*_{p+1}}\quad et\quad (E_{ME})_p=\frac{x^*_p-x^*_{p+1}}{x_p-x^*_{p+1}}$$

$$\frac{(E_{ME})_p}{(E_{MR})_{p+1}}=\left(\frac{x^*_p-x^*_{p+1}}{x_p-x^*_{p+1}}\right)\left(\frac{x_p-x^*_{p+1}}{x_p-x_{p+1}}\right)=\boxed{\frac{x^*_p-x^*_{p+1}}{x_p-x_{p+1}}}$$

$$[12.10]\qquad \frac{(x^*_1-x^*_2)}{(x_0-x_1)}\bullet\frac{(x^*_2-x^*_3)}{(x_1-x_2)}\cdots\frac{(x^*_{n-1}-x^*_n)}{(x_{n-2}-x_{n-1})}\bullet\frac{(x^*_n-x^*_{n+1})}{(x_{n-1}-x_n)}=A^n$$

$$\frac{1}{\boxed{(x_0-x_1)}}\bullet\boxed{\frac{(E_{ME})_1}{(E_{MR})_2}}\bullet\frac{(E_{ME})_2}{(E_{MR})_3}\cdots\bullet\frac{(E_{ME})_{n-1}}{(E_{MR})_{n-2}}\bullet\boxed{\frac{(E_{ME})_{n-1}}{(E_{MR})_{n-2}}}\bullet\boxed{(x^*_n-x^*_{n+1})}=A^n$$

$$(E_{MR})_1=\frac{x_0-x_1}{x_0-x^*_1};(E_{ME})_n=\frac{x^*_n-x^*_{n+1}}{x_n-x^*_{n+1}}\Rightarrow\frac{(E_{ME})_n}{(E_{MR})_1}=\frac{(x^*_n-x^*_{n+1})}{(x_n-x^*_{n+1})}\frac{(x_0-x^*_1)}{(x_0-x_1)}$$

$$\Rightarrow\frac{\boxed{(x^*_n-x^*_{n+1})}}{\boxed{(x_0-x_1)}}=\frac{(x_n-x^*_{n+1})}{(x_0-x^*_1)}\frac{(E_{ME})_n}{(E_{MR})_1}$$

$$[12.10]\Leftrightarrow\frac{(x_n-x^*_{n+1})}{(x_0-x^*_1)}\frac{(E_{ME})_n}{(E_{MR})_1}\bullet\frac{(E_{ME})_1}{(E_{MR})_2}\bullet\frac{(E_{ME})_2}{(E_{MR})_3}\cdots\bullet\frac{(E_{ME})_{n-1}}{(E_{MR})_{n-2}}\bullet\frac{(E_{ME})_{n-1}}{(E_{MR})_{n-2}}=A^n$$

Si nous supposons que les efficacités sont constantes sur tous les étages:

$$\boxed{\frac{(x_n-x^*_{n+1})}{(x_0-x^*_1)}}=\left(A\frac{E_{MR}}{E_{ME}}\right)^n\qquad[12.11]$$

Bilan matière sur l'ensemble des étages

$$Rx_0+Ey_{n+1}=Rx_n+Ey_1\qquad\Rightarrow\frac{R}{mE}x_0+\frac{y_{n+1}}{m}=\frac{R}{mE}x_n+\frac{y_1}{m}$$

$$\Rightarrow A(x_0-x_n)=\frac{(y_1-y_{n+1})}{m}\qquad\Rightarrow mx_n=mx_0+\frac{1}{A}(y_{n+1}-y_1)\qquad[12.12]$$

Par définition, les grandeurs x^*_p et y_p sont à l'équilibre : $y_p=mx^*_p$

$$\boxed{\frac{(x_n-x^*_{n+1})}{(x_0-x^*_1)}}=\frac{(mx_n-mx^*_{n+1})}{(mx_0-mx^*_1)}=\boxed{\frac{(mx_n-y_{n+1})}{(mx_0-y_1)}}\qquad[12.13]$$

$$[12.12] - y_{n+1} \Rightarrow \left(mx_n - y_{n+1}\right) = mx_0 + \frac{1}{A}\left(y_{n+1} - y_1\right) - y_{n+1}$$

$$\left(mx_n - y_{n+1}\right) = \left(\frac{1}{A} - 1\right) y_{n+1} + mx_0 - \frac{1}{A} y_1 + \boxed{\left(\frac{1}{A} mx_0 - \frac{1}{A} mx_0\right)}$$

$$\left(mx_n - y_{n+1}\right) = \left(\frac{1}{A} - 1\right)\left(y_{n+1} - mx_0\right) + \frac{1}{A}\left(mx_0 - y_1\right) \qquad [12.14]$$

$$\frac{\left(x_n - x_{n+1}^*\right)}{\left(x_0 - x_1^*\right)} = \frac{\left(mx_n - y_{n+1}\right)}{\left(mx_0 - y_1\right)} \qquad [12.13]$$

$$\frac{\left(x_n - x_{n+1}^*\right)}{\left(x_0 - x_1^*\right)} = \frac{\left(\frac{1}{A} - 1\right)\left(y_{n+1} - mx_0\right) + \frac{1}{A}\cancel{\left(mx_0 - y_1\right)}}{\cancel{\left(mx_0 - y_1\right)}}$$

$$\boxed{\frac{\left(x_n - x_{n+1}^*\right)}{\left(x_0 - x_1^*\right)} = \left(\frac{1}{A} - 1\right)\frac{\left(y_{n+1} - mx_0\right)}{\left(mx_0 - y_1\right)} + \frac{1}{A}} \qquad [12.15]$$

$$[12.15] \qquad \frac{\left(x_n - x_{n+1}^*\right)}{\left(x_0 - x_1^*\right)} = \left(\frac{A-1}{A}\right)\frac{\left(y_{n+1} - mx_0\right)}{\left(y_1 - mx_0\right)} + \frac{1}{A}$$

$$[12.11] \qquad \frac{\left(x_n - x_{n+1}^*\right)}{\left(x_0 - x_1^*\right)} = \left(A\frac{E_{MR}}{E_{ME}}\right)^n$$

$$\Rightarrow \left(A\frac{E_{MR}}{E_{ME}}\right)^n = \left(\frac{A-1}{A}\right)\frac{\left(y_{n+1} - mx_0\right)}{\left(y_1 - mx_0\right)} + \frac{1}{A} \qquad [12.16]$$

$$[12.6] \quad \left(\frac{1}{E_{MR}} - 1\right) = A\left(\frac{1}{E_{ME}} - 1\right) \quad \times E_{MR} \quad \Rightarrow \left(\frac{E_{MR}}{E_{MR}} - E_{MR}\right) = A\left(\frac{E_{MR}}{E_{ME}} - E_{MR}\right)$$

$$\Rightarrow A\frac{E_{MR}}{E_{ME}} = \left(1 - E_{MR}\right) + AE_{MR} \quad \Rightarrow \quad A\frac{E_{MR}}{E_{ME}} = 1 + \left(A-1\right)E_{MR} \qquad [12.17]$$

$$\begin{matrix}[12.16] \\ [12.17]\end{matrix} \quad \Rightarrow \left[1 + \left(A-1\right)E_{MR}\right]^n = \left(\frac{A-1}{A}\right)\frac{\left(y_{n+1} - mx_0\right)}{\left(y_1 - mx_0\right)} + \frac{1}{A} \qquad [12.18]$$

$$\left[1+(A-1)E_{MR}\right]^n = \left(\frac{A-1}{A}\right)\frac{(y_{n+1}-mx_0)}{(y_1-mx_0)}+\frac{1}{A} \qquad [12.18]$$

On trouve ainsi le nombre d'étages en fonction des spécifications du problème:

$$\boxed{n = \frac{Log\left[\left(\frac{A-1}{A}\right)\frac{(y_{n+1}-mx_0)}{(y_1-mx_0)}+\frac{1}{A}\right]}{Log\left[1+(A-1)E_{MR}\right]}} \qquad [12.19]$$

Pour des d'étages théoriques (E_{MR}=1) on retrouve ainsi la relation de Kremser (équation11.12) du chapitre 11.

$$n = \frac{Log\left[\left(\frac{A-1}{A}\right)\frac{(y_{n+1}-mx_0)}{(y_1-mx_0)}+\frac{1}{A}\right]}{Log(A)} \qquad [11.12]$$

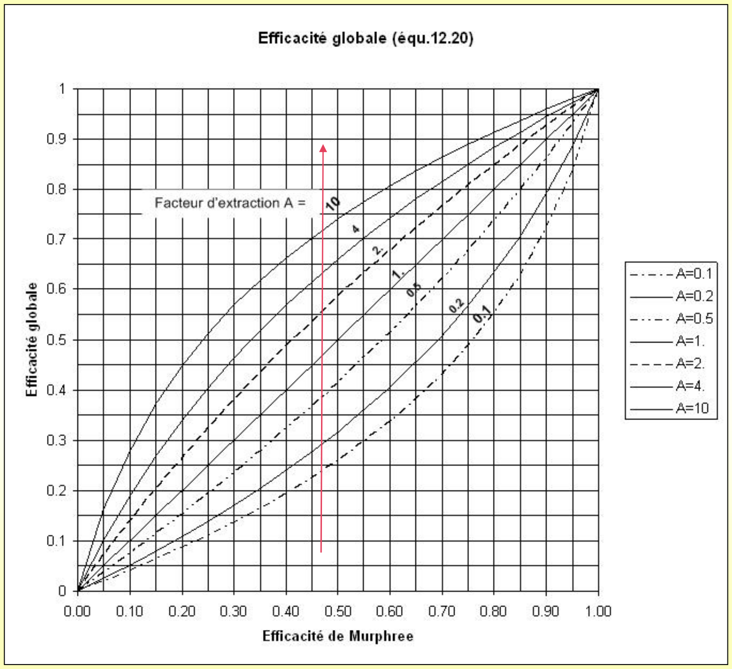
L'efficacité globale de l'appareil se calcule ainsi facilement:

$$E_G = \frac{\overset{[11.12]}{N_{Théorique}}}{\underset{[12.19]}{N_{Réel}}} = \frac{Log\left[1+(A-1)E_{MR}\right]}{Log(A)} \qquad [12.20]$$

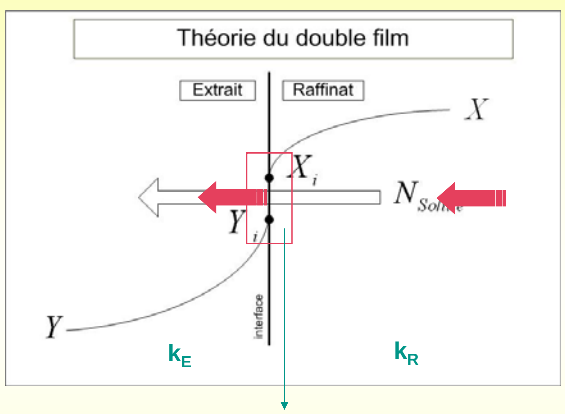
Dans le cas particulier où le facteur d'extraction vaut $A = \frac{R}{mE} = 1$

$$\lim_{A\to 1} [12.19] \Rightarrow n = \frac{1}{E_{MR}}\left(\frac{y_{n+1}-mx_0}{y_1-mx_0}\right) \qquad [12.21]$$

$$n = \frac{1}{E_{MR}}\left(\frac{x_o - x^*_{n+1}}{x_n - x^*_{n+1}}\right) \qquad \lim_{A\to 1} [12.20] \Rightarrow E_G = E_{MR}$$



12.3 Transfert de matière: théorie du double film



(x_i est en équilibre avec y_i)

Chacune des 2 étapes de ce transfert sera caractérisée par un coefficient de transfert de masse, respectivement $\mathbf{k_R}$ $\mathbf{k_E}$.
Il est possible d'exprimer le flux de soluté en terme de coefficients globaux de transfert $\mathbf{K_R}$ **et** $\mathbf{K_E}$, respectivement pour les phases raffinat et extraite

$$N = k_R\left(x - x_i\right) \Rightarrow \boxed{\frac{Nm}{k_R} = m\left(x - x_i\right) = \left(y^* - y_i\right)}$$

$$N = k_E\left(y_i - y\right) \Rightarrow \boxed{\frac{N}{k_E} = \left(y_i - y\right)}$$

$$\frac{N}{k_E} + \frac{Nm}{k_R} = N\left(\frac{1}{k_E} + \frac{m}{k_R}\right) = \left(\cancel{y_i} - y\right) + \left(y^* - \cancel{y_i}\right) = \left(y^* - y\right)$$

$$\boxed{N} = \frac{\left(y^* - y\right)}{\left(\frac{1}{k_E} + \frac{m}{k_R}\right)} \boxed{= K_E\left(y^* - y\right)} \quad avec \quad \boxed{\frac{1}{K_E} = \left(\frac{m}{k_R} + \frac{1}{k_E}\right)}$$

De même on aurait :

$$\boxed{N = K_R\left(x - x^*\right)} \quad avec \quad \boxed{\frac{1}{K_R} = \left(\frac{1}{k_R} + \frac{1}{mk_E}\right)}$$

•L'intérêt du coefficient global K (par rapport à k) est qu'il ne nécessite plus l'usage des concentrations aux interfaces. On rappelle que le symbole (*) indique qu'il s'agit de la valeur en équilibre avec la concentration dans l'autre phase.

•Utilisons ce modèle de transfert de matière pour déterminer l'efficacité de Murphree d'un étage.

•Le développement suivant suppose que les **deux phases de l'étage sont parfaitement agitées** afin que le potentiel de transfert (x_n-x_n*) soit constant dans l'étage.

•On appelle V_n (m^3) le volume de l'étage, a, l'aire interfaciale d'échange entre les deux phases (m^2/m^3).

•Traduisons en équation le fait qu'une certaine quantité de soluté a quitté le raffinat pour passer dans l'extrait au travers de l'interface.

$$\boxed{R\left(x_{n-1} - x_n\right)} = \boxed{a\,V_n\;K_R\left(x_n - x_n^*\right)}$$

$$\Rightarrow \left(x_{n-1} - x_n\right) = \boxed{\frac{K_R\,a\,V_n}{R}}\left(x_n - x_n^*\right) = \boxed{NUT_R}\left(x_n - x_n^*\right) \quad [12.26]$$

[12.26] $$\left(x_{n-1}-x_n\right)=NUT_R\left(x_n-x_n^*\right)$$

[12.3] $$E_{MR}=\frac{x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}-x_n^*}\quad\Rightarrow E_{MR}=\frac{\boxed{NUT_R\left(x_n-x_n^*\right)}}{x_{n-1}-x_n^*}$$

$$E_{MR}=\frac{NUT_R}{\dfrac{\boxed{x_{n-1}-x_n^*}}{x_n-x_n^*}}=\frac{NUT_R}{\dfrac{x_{n-1}\boxed{-x_n+x_n}-x_n^*}{x_n-x_n^*}}$$

$$E_{MR}=\frac{NUT_R}{\boxed{\dfrac{x_{n-1}-x_n}{x_n-x_n^*}}+1}\quad\Rightarrow E_{MR}=\frac{NUT_R}{NUT_R+1}$$

$$\boxed{E_{MR}=\frac{NUT_R}{1+NUT_R}}\qquad\boxed{NUT_R=\frac{K_R\,a\,V_n}{R}}$$

[12.27] [12.28]

De même en raisonnant sur la phase extraite on trouve

$$\boxed{E_{ME}=\frac{NUT_E}{1+NUT_E}}\qquad\boxed{NUT_E=\frac{K_E\,a\,V_n}{E}}$$

[12.29] [12.30]

$$E_{MR}=\frac{NUT_R}{1+NUT_R}\qquad NUT_R=\frac{K_R\,a\,V_n}{R}$$

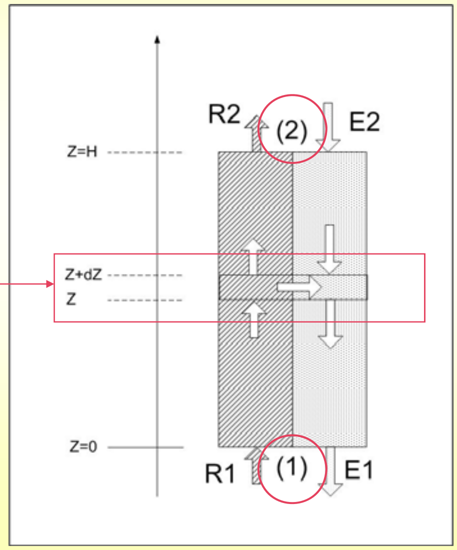
[12.27] [12.28]

Les termes NUT, **nombre d'unité de transfert**, sont des nombres adimensionnels associés à la facilité d'amener dans l'étage, les courants à l'équilibre. Pour un étage théorique, NUT = ∞.

12.4 Extracteurs à contact continu

Le concept d'étage (même réel) n'est pas pertinent. On préfère dans ce cas utiliser les notions de **nombre d'unité de transfert** (**NUT**) et de **hauteur d'unité de transfert** (**HUT**)

Bilan



•écoulement piston des phases (attention, souvent cette hypothèse n'est pas acceptable à cause de la dispersion axiale)

•solutions immiscibles et diluées en soluté R=constante et E=constante

Bilan sur le raffinat entre z et z+dz

$$\boxed{-d\left(xR\right)} = \boxed{K_R\left(x-x^*\right)aS_C dz} \quad \Rightarrow \boxed{-\frac{dx}{x-x^*} = \left(\frac{K_R a S_C}{R}\right)dz}$$

S_C : *section de la colonne*

$$\Rightarrow \boxed{\int_{x1}^{x2}} -\frac{dx}{x-x^*} = \boxed{\int_0^H}\left(\frac{K_R a S_C}{R}\right)dz = \left(\frac{K_R a S_C}{R}\right)\boxed{H}$$

$$\boxed{\Rightarrow \qquad H = HUT_R \; NUT_R} \quad [12.32]$$

$$\boxed{HUT_R = \left(\frac{R}{K_R a S_C}\right)} \qquad \boxed{NUT_R = \int_{x2}^{x1}\frac{dx}{x-x^*}}$$

La relation 12.32 indique que la hauteur totale de la colonne est le produit d'une HUT caractérisant la difficulté de faire le transfert de matière par une NUT caractérisant la difficulté thermodynamique de faire la séparation.

De même un bilan coté extrait aurait permis d'obtenir:

$$\Rightarrow \quad H = HUT_E \; NUT_E \qquad [12.33]$$

$$HUT_E = \left(\frac{E}{K_E a S_C}\right) \qquad NUT_E = \int_{y2}^{y1} \frac{dy}{y^* - y}$$

Relation de Colburn

Dans le cas où la courbe d'équilibre est une droite,
et les solutions sont diluées, il est possible d'intégrer NUT:

Bilan entre le niveau 1 et une hauteur quelconque, z:

$$R\left(x_1 - x\right) = R\left(x_1 - \frac{y^*}{m}\right) = E\left(y_1 - y\right) \qquad \Rightarrow y^* = mx_1 + A\left(y - y_1\right)$$

Bilan entre le niveau 2 et une hauteur quelconque, z:

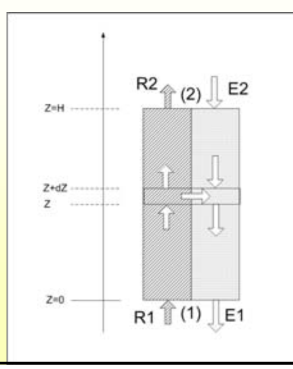
$$R\left(x - x_2\right) = E\left(y - y_2\right) = E\left(mx^* - y_2\right) \qquad \Rightarrow x^* = A\left(x - x_2\right) + \frac{y_2}{m}$$

$$NUT_R = \int_{x2}^{x1} \frac{dx}{x - x^*}$$

Relation de Colburn: pour des solutions diluées

$$NUT_R = \frac{1}{1-A} Ln\left[\left(1-A\right)\left(\frac{mx_1 - y_2}{mx_2 - y_2}\right) + A\right] \qquad [12.35]$$

$$NUT_E = \frac{A}{A-1} Ln\left[\left(\frac{A-1}{A}\right)\left(\frac{y_2 - mx_1}{y_1 - mx_1}\right) + \frac{1}{A}\right] \qquad [12.36]$$



$$A = \frac{R}{mE}$$

12.5 Hauteur équivalente à un plateau théorique (HEPT)

Certains auteurs préfèrent utiliser le concept de hauteur équivalente à un plateau théorique (HEPT) plutôt que les concepts des HUT et NUT. HEPT est simplement reliée au nombre d'étages théoriques suivant la relation:

$$HEPT = \frac{H}{N_{Théorique}}$$

$$\Leftrightarrow \quad H = HEPT \cdot N_{Théorique}$$

Cette approche, plus simple, est cependant moins phénoménologique que l'approche des HUT-NUT.